



کد فرم: FR/FY/11

ویرایش: صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی: ریاضی امتحان درس: ریاضی ۱ (شیمی-فیزیک) نیمسال (اول/دوم) ۹۳-۱۳۹۲ مدرس: شاه حسینی- موسوی
نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: تاریخ: ۱۳۹۳/۳/۲۱ وقت: ۱۳۵ دقیقه

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هیچگونه ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = x\sqrt{2-x}$ و محور x ها را محاسبه کنید. ۲۰ نمره

سوال ۲- انتگرال نامعین $\int \frac{3x^2 + 11x + 18}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$ را حل کنید. ۲۵ نمره

سوال ۳- ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{2\sqrt{x+1}}{x^2 + 2x + 3}$ حول محور x ها دوران کرده است. ۲۰ نمره
حجم جسم حاصل را بیابید.

سوال ۴- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ را مشخص کنید. ۱۰ نمره

فقط به یکی از قسمتهای (الف) یا (ب) پاسخ دهید:

سوال ۵- الف) مقدار $z = \frac{(1+i)^3}{(1-i)(\sqrt{3}+i)^5}$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

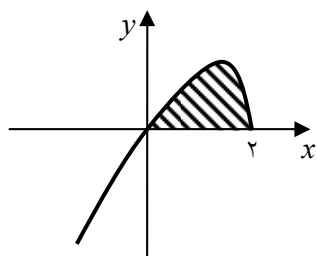
ب) شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n} (x-3)^n$ را بیابید.

سوال ۶- سری مک لورن تابع $y = \tan x$ را بنویسید. (حداقل ۳ جمله اولیه غیر صفر را بنویسید.) ۱۵ نمره

این سوال را فقط دانشجویان رشته فیزیک پاسخ دهند.

سوال ۷- انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

موفق باشید



سوال ۱- مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با: $S = \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx$

روش اول : برای حل انتگرال از تغییر متغیر $t^2 = 2 - x$ استفاده می کنیم.

$$S = \int_{t=\sqrt{\gamma}}^{\cdot} (\gamma - t^{\gamma}) \sqrt{t^{\gamma}} (-\gamma t dt) = \int_{t=\cdot}^{\sqrt{\gamma}} (\gamma t^{\gamma} - \gamma t^{\gamma}) dt$$

$$= \left[\frac{\gamma}{\gamma} t^{\gamma} - \frac{\gamma}{\delta} t^{\delta} \right]_{t=\cdot}^{\sqrt{\gamma}} = \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\gamma} - \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\delta} = \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\delta}$$

روش دوم : برای حل انتگرال از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sqrt{r-x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-r}{r} (\sqrt{r-x})^r \end{cases} \rightarrow S = \int_1^r x \sqrt{r-x} dx = \frac{-r}{r} (\sqrt{r-x})^r \Big|_1^r + \int_1^r \frac{r}{r} (\sqrt{r-x})^r dx$$

$$\rightarrow S = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{1-x})^x dx = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{-1}{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1 \times \sqrt{1}}{1/2}$$

سوال ۲- تابع گویای داخل انتگرال را به کسرهای ساده تر تجزیه می کنیم.

$$\frac{rx^r + 11x + 1\lambda}{x^r + 6x^r + 9x} = \frac{rx^r + 11x + 1\lambda}{x(x+r)^r} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+r} + \frac{C}{(x+r)^r}$$

$$A = \frac{rx^r + 11x + 1\lambda}{(x+r)^r} \Big|_{x=-r} = r, \quad C = \frac{rx^r + 11x + 1\lambda}{x} \Big|_{x=-r} = -r$$

می دانیم :

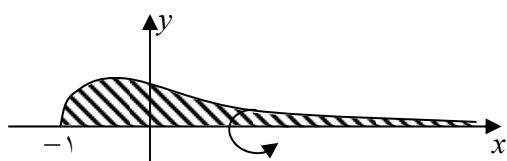
$$\frac{3x^2+11x+18}{x^2+8x^2+9x} = \frac{2}{x} + \frac{B}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2}$$

تا اینجا داریم :

این تساوی به ازای $x = -1$ برقرار است پس $\frac{10}{-4} = -2 + \frac{B}{2} - 1$ یعنی $B = 12$ بنابر این :

$$\frac{3x^2 + 11x + 18}{x^2 + 6x + 9} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2}$$

$$\int \frac{r x^r + 11 x + 18}{x^r + 8 x^r + 9 x} dx = \int \left(\frac{r}{x} + \frac{1}{x+r} - \frac{r}{(x+r)^r} \right) dx = r \ln x + \ln(x+r) + \frac{r}{x+r} + c$$



سوال ۳- حجم جسم مورد نظر برابر است با :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{\infty} \pi y^{\mathfrak{r}} dx = \pi \int_{-1}^{\infty} \frac{\mathfrak{r}(x+1)}{(x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}x + \mathfrak{r})^{\mathfrak{r}}} dx \\ &= \mathfrak{r}\pi \int_{-1}^{\infty} \frac{\mathfrak{r}x + \mathfrak{r}}{(x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}x + \mathfrak{r})^{\mathfrak{r}}} dx = \mathfrak{r}\pi \times \frac{-1}{x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}x + \mathfrak{r}} \Big|_{-1}^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

سوال ۴- روش اول (آزمون مقایسه) : می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست و به ازای هر n داریم $\frac{1}{n^p + n} < \frac{1}{n^p}$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ نیز همگراست.

روش دوم (آزمون مقایسه حدی) : می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست و به ازای هر n داریم $\lim(\frac{1}{n^2+n} \div \frac{1}{n^2}) = 1$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ نیز همگراست.

روش سوم (آزمون انتگرال) : می دانیم $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{\infty} = \ln 2$

چون انتگرال همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ نیز همگراست.

روش چهارم (محاسبه مقدار سری) : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1$ یعنی سری همگراست.

سوال ۵- الف) $z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)(\sqrt{3}+i)^5} = \frac{(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^7}{(\sqrt{2} e^{-i\pi/4})(\sqrt{2} e^{i\pi/6})^5} = \frac{2\sqrt{2} e^{7i\pi/4}}{32\sqrt{2} e^{-\pi i/4} e^{5\pi i/6}} = \frac{1}{16} e^{\pi i/6} = \frac{1}{32} (\sqrt{3}+i)$

ب) شعاع همگرایی سری برابر $R=5$ است زیرا : $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{5^n} \div \frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(2n+1)}{2n+3} = 5$

سوال ۶- مشتقات تابع $y = \tan x$ را محاسبه می کنیم.

$y' = 1 + \tan^2 x$, $y'' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$, $y^{(3)} = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^3 x (1 + \tan^2 x)$, $y^{(4)} = 16 \tan x (1 + \tan^2 x)^3 + 4 \tan^5 x (1 + \tan^2 x)$

تا اینجا داریم $y^{(0)}(0) = 0$, $y^{(1)}(0) = 1$, $y^{(2)}(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 2$, $y^{(4)}(0) = 0$ که شامل دو مقدار غیر صفر است.

$y^{(5)} = 16(1 + \tan^2 x)^4 + 16 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^3 + 8 \tan^4 x (1 + \tan^2 x) \rightarrow y^{(5)}(0) = 16$

اکنون داریم : $y = \tan x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$

سوال ۷- برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $x = 2 \sin t$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2 \cos t dt}{(4-4 \sin^2 t)\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{4} \tan t + c = \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\cos t} + c \\ &= \frac{1}{4} \frac{x/2}{\sqrt{4-x^2}/2} + c = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + c \end{aligned}$$